D．二次方程式の解の存在範囲

【例題１１】

次の各問いに答えよ。

(1) x の二次方程式 $x^2 + a(a-3)x + a - 4 = 0$ が 1 より大きな解と、－ 2 より小さな解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 二次方程式 $2x^2 - 3x + a = 0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり、他の解が 1 と 2 の間にあるように、定数 a の値の範囲を求めよ。

(3) 二次方程式 $x^2 - 8ax - 8a + 24 = 0$ がともに正の異なる 2 つの解をもつように、定数 a の値の範囲を求めよ。

《考え方》

この種の問題では、実際に方程式を解くことはしない。まず、グラフをかいて、f(a)の符号を調べることだ。

また、通常、実数解だから、判別式 D は　$D \geqq 0$

また、問題によっては、グラフの軸の位置も考えなければならない。

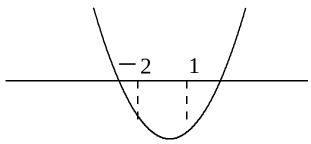
問題の難易度で、次の手順で考えるとよい。

① グラフをかく(だいたいでよい)
② f(a) の符号(正か負か)を調べる。
③ 実数解かどうかで $D \geqq 0$ を使う。
④ 軸の方程式 $x = p$ の位置を調べる。

解

(1) $x^2 + a(a-3)x + a - 4 = 0$ ……①

$f(x) = x^2 + a(a-3)x + a - 4$ とおくと、グラフは右のようになり、



$f(1) < 0$　かつ　$f(-2) < 0$

を満たせばよい。

$f(1) = 1 + a^2 - 3a + a - 4 < 0$

$a^2 - 2a - 3 < 0$

$(a-3)(a+1) < 0$　　　$-1 < a < 3$

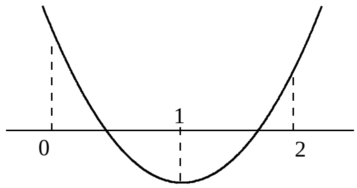
$f(-2) = 4 - 2a^2 + 6a + a - 4 < 0$

$-2a^2 + 7a < 0$

$a(2a-7) > 0$　　　$a < 0,\quad a > \dfrac{7}{2}$

よって、②, ③より　$-1 < a < 0$

(2)　$2x^2 - 3x + a = 0$　……①



$f(x) = 2x^2 - 3x + a$ とおくと、

グラフは右のようになり、

$f(0) > 0$　かつ　$f(1) < 0$ かつ　$f(2) > 0$

を満たせばよい。

$f(0) = a > 0$　……②

$f(1) = 2 - 3 + a < 0$

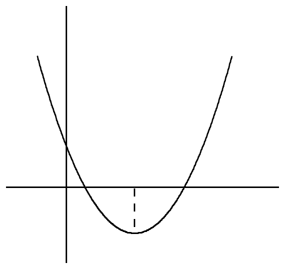
$a < 1$　……③

$f(2) = 8 - 6 + a > 0$

$a > -2$　……④

よって、②, ③, ④より　　$0 < a < 1$

(3)　$x^2 - 8ax - 8a + 24 = 0$　……①



$f(x) = x^2 - 8ax - 8a + 24$ とおくと、

$f(x) = (x - 4a)^2 - 16a^2 - 8a + 24$

①の解が正の異なる 2 つの解をもつには、

グラフが右のようになったときであり、

そのためには

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ D > 0 \\ \text{軸の方程式}\ 4a > 0 \end{cases}$$

を満たせばよい。

[注] $D > 0$ がないと、図 I のようなグラフも含むことになり、

軸の方程式 $4a > 0$ がないと、図 II のようなグラフも含む。

図 I

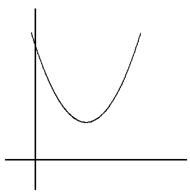
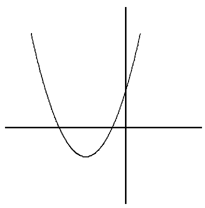


図 II



$f(0) = -8a + 24 > 0$

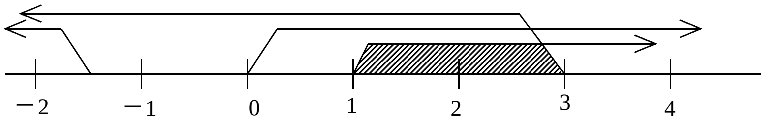
$a < 3$　……②

$D > 0$ から　$\dfrac{D}{4} = (4a)^2 + (8a - 24) > 0$

$$16a^2 + 8a - 24 > 0$$
$$2a^2 + a - 3 > 0$$
$$(2a + 3)(a - 1) > 0 \quad \therefore\ a < -\frac{3}{2}\ ,\quad a > 1 \ \cdots\cdots ③$$

軸の方程式から　$4a > 0$　$\therefore\ a > 0$　……④

よって、②, ③, ④より



$\underline{1 < a < 3}$

★ 16p の問題 $\boxed{\mathbf{10}}$ をせよ。