二次方程式

文字が 1 つで、二次式になる方程式を二次方程式という。

一般形　$ax^2 + bx + c = 0$　(a, b, c は定数)

【例】$\begin{cases} x^2+3x-2=0 \\ 2x^2-5x+1=0 \end{cases}$

この単元は、この二次方程式の解き方と、それを使った文章題の解き方について学習する。

Ⅰ. 二次方程式の解き方

二次方程式を成り立たせる x の値を求めることを『二次方程式を解く』というが、その求め方は大きく分けて 2 つある。

- 平方根の意味に基づいた解き方
- 因数分解による解き方

まずは平方根の意味に基づいた解き方から学習しよう。

A. 平方根の意味に基づいた解き方

例えば $x^2 = 9$ となる x は、その平方根を考えて $x = \pm 3$ と求められるね。つまり、式をその形に変形することによって解く解き方と言える。

1) $ax^2 = b$ の解き方

【例 1】　$x^2 = 5$　　　平方根をとって！

$x = \pm\sqrt{5}$

【例 2】　$4x^2 - 11 = 0$

$4x^2 = 11$

$x^2 = \frac{11}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{11}{4}}$　　　$\therefore\ x = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$

★ 練習問題 $\boxed{1}$ をせよ。

2) $(x + m)^2 = n$ の解き方

【例 1】　$(x + 1)^2 = 36$

$X^2 = 36$　　　※ $x + 1 = X$ とおいて

$X = \pm 6$

$x + 1 = \pm 6$　　　※ $X = x + 1$ をもどして

$x = -1 \pm 6$

$= -1 + 6,\ -1 - 6$

$\therefore\ x = 5,\ -7$

【例 2】　$(x-3)^2=5$

$X^2=5$

$X=\pm\sqrt{5}$

$x-3=\pm\sqrt{5}$

$\therefore\quad x=3\pm\sqrt{5}$

［注］上の $3\pm\sqrt{5}$ は、$3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ をまとめたものである。

★ 練習問題 $\boxed{2}$ をせよ。

3）$x^2+px+q=0$ の解き方

《ポイント》$(x+m)^2=n$ の形に変形すればいいね。

【例】　$x^2+8x+14=0$

$x^2+8x\quad=-14$　　※ 定数項を移項

（ここで　x^2+8x に注目すると、これに $+16$ をつけ加えると
$x^2+8x\ +16=(x+4)^2$ になるから、両辺に 4^2 を加える）

$x^2+8x+4^2=-14+4^2$　　※ x の係数の半分の 2 乗を加える

$(x+4)^2=2$

$x+4=\pm\sqrt{2}$

$\therefore\quad x=-4\pm\sqrt{2}$

※ 少しずつ、一般形 $ax^2+bx+c=0$ に近づいているのがわかるかな。
　最終的には二次方程式を解くための公式があって、実はその公式を理解するための解き方を学んでいるのだ。中学では 2)の $(x+m)^2=n$ の解き方まで理解すればよいことになっている。その後は高 1 で学ぶ。
　ところが、最近、日本の児童の学力低下が騒がれ、また中 3 に戻るらしい。文部省はフラフラしてるよ。

★ 練習問題 $\boxed{3}$ をせよ。

B. 因数分解による解き方

左辺を因数分解することによって解く解き方である。

【例】　$x^2+x-12=0$

$(x-3)(x+4)=0$

よって　$x-3=0$　または　$x+4=0$

つまり　　$x=3$　または　$x=-4$

$\therefore\quad x=3,\ -4$

※ 上の解き方は、

$A\times B=0$ ならば $A=0$ または $B=0$

つまり、

$\overset{A}{(x-3)} \times \overset{B}{(x+4)} = 0$ より　$x-3=0$ または $x+4=0$

という考え方を利用している。

【例題 1】

次の二次方程式を解け。

(1) $(x+2)(x-3)=0$　　(2) $(x+3)^2=0$

(3) $x(x-5)=0$　　(4) $(x+1)(2x-1)=0$

解

(1) $(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,\ 3$

［注］答えの符号が、式の中の符号の逆になる理由はわかるよね？

(2) $(x+3)^2=0$

$x=-3$

［注］上の $(x+3)^2=0$ は、$(x+3)(x+3)=0$ のことで、どちらからも $x=-3$ となる。つまり、この二次方程式の解は 1 つしかない！

二次方程式の解はふつう 2 つだが、1 つになることもある。

(3) $x(x-5)=0$

$x=0,\ 5$

［注］これは 0 と 5 の 2 つの値のうち、0 のほうを落としやすいから気をつけて！

(4) $(x+1)(2x-1)=0$　　※ これはマチガイやすい！

$x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

［注］右側の多項式の x の係数が 1 ではなく 2 であることに注意！

$2x-1=0$ より $x=\dfrac{1}{2}$

★ 12p の練習問題 $\boxed{4}$ をせよ。

【例題 2】

次の二次方程式を解け。

(1) $x^2-x-6=0$　　(2) $x^2-4x=0$

(3) $x^2-4x=-4$　　(4) $(x-9)(x+3)=3(x^2-21)$

解

(1) $x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = 3, \ -2$

(2) $x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$\therefore \quad x = 0, \ 4$　　［注］$x = 0$ を忘れるな！

(3) $x^2 - 4x = -4$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$

$\therefore \quad x = 2$

(4) $(x - 9)(x + 3) = 3(x^2 - 21)$

$x^2 - 6x - 27 = 3x^2 - 63$　　※ まず、式を整理する

$x^2 - 3x^2 - 6x - 27 + 63 = 0$

$-2x^2 - 6x + 36 = 0$　　※ x^2 の係数は正にする！

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x + 6)(x - 3) = 0$

$\therefore \quad x = 3, \ -6$

★ 練習問題 5 をせよ。

II．二次方程式の利用

A. 解に関する問題

【例題 3】

x についての二次方程式 $x^2 + ax + 15 = 0$ の解の 1 つが -3 であるとき、a の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

《考え方》

どんな方程式であれ、そもそも『解』とは、その方程式を成り立たせる x (べつに x でなくともよいのだが)の値のことだから、「解が -3」ということから、$x = -3$ を上の方程式に代入しても成り立つはずである。そこから、a の値が求まる。

解　　$x^2 + ax + 15 = 0$ ………①

条件より $x = -3$ を①に代入

$(-3)^2 + a \times (-3) + 15 = 0$

$9 - 3a + 15 = 0$　　※ a についての方程式だ！

$3a = 24$

$a = 8$

$a=8$ を①に代入して解くと

$$x^2+8x+15=0$$
$$(x+5)(x+3)=0$$
$$x=-3,\ -5$$

よって、他の解は -5

答 $\left[\begin{array}{l} a=8 \\ \text{他の解}\ -5 \end{array}\right.$

【例題 4】

二次方程式 $x^2+px+q=0$ の解が 5 と -3 のとき、p, q の値を求めよ。

《考え方》

解の 5 と -3 が、因数分解によって求められたとすると、その式は

$$(x-5)(x+3)=0$$

となっているはずである。

解

文章条件より $(x-5)(x+3)=0$

展開して $x^2-2x-15=0$

よって $p=-2,\quad q=-15$

［別解］

【例題 3】の考え方と同じように、5 も -3 も二次方程式の解だから、

$$x+px+q=0$$

に代入しても成り立つはずである。

$x=5$ を①に代入 $\quad 5^2+5p+q=0$

$\qquad 5p+q=-25 \quad \cdots\cdots②$

$x=-3$ を①に代入 $\quad (-3)^2-3p+q=0$

$\qquad -3p+q=-9 \quad \cdots\cdots③$

②−③ (つまり、②,③の連立方程式を解く！)

$$8p=-16$$
$$\therefore\ p=-2,\quad q=-15$$

★ 練習問題 6 をせよ。

B. 文章題

中 1, 中 2 と、それぞれの方程式において、文章題を解く学習をしてきたが、二次方程式の文章題は、中 2 の連立方程式のそれに比べるとパターンも少なく、比較的解きやすいものだ。

1) 和と積の問題

これが最も やさしい問題だ。

【例題 5】

和が 8 で積が 15 である 2 数を求めよ。

解

求める 2 数の 1 つを x とすると、もう一方は (8 − x)
積が 15 より

$$x(8-x)=15$$
$$8x-x^2=15$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$(x-5)(x-3)=0$$
$$x=3,5$$

x = 3 のとき もう 1 つは 8 − 3 = 5
x = 5 のとき もう 1 つは 8 − 5 = 3

答 3 と 5

［注］ 和の場合は、問題ないが、差の場合は答えが 2 組あるので注意が必要。

2) 連続した整数の問題

【例題 6】

連続した 3 つの正の整数がある。小さい方の 2 数の積は、3 つの数の和に等しいという。これらの整数を求めよ。

《考え方》

『3 つの連続した整数』という条件が出たら、まん中の数を x とする。
もう 2 数は x − 1, x + 1 となる。

$$x-1,\quad x,\quad x+1$$

解

まん中の数を x とすると、他の 2 数は x − 1, x + 1
題意(問題の条件)より

$$x(x-1)=(x-1)+x+(x+1)$$
$$x^2-x=3x$$
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$$\therefore\ x=0,\ 4$$

x は正の整数より x = 4
x = 4 のとき、3 つの整数は 3, 4, 5 となり、これは問題にあっている。

答 3, 4, 5

［注 1］二次方程式の文章題では、通常、解となる値が 2 つあることから、答えが 2 通りに出る場合もあり、上のように 1 通りに決まる場合もあったりと、まちまちである。

　つまり、文章中に出された条件をよく読みとっておかなければならないし、最後に検算をして、問題にあっているかどうかを確かめなければならない。

［注 2］整数問題では、『連立方程式』などで学習したような、各位の数を x, y として式を立てる問題もある。

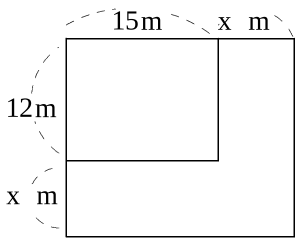
★ 練習問題 $\boxed{7}$ をせよ。

3）面積に関する問題

【例題 7】

　縦が 12m、横が 15m の長方形がある。この縦と横を同じ長さだけのばした長方形をつくり、その面積がもとの長方形の 1.5 倍になるようにしたい。何 m のばしたらよいか。

解



　縦、横とも x m のばすとすると、

のばした長方形の横は　$(12+x)$ m

　　　　　　　　縦は　$(15+x)$ m

もとの長方形の面積は　$12 \times 15 = 180\text{m}^2$

よって

$$(12+x)(15+x) = 180 \times 1.5$$
$$180 + 27x + x^2 = 270$$
$$x^2 + 27x - 90 = 0$$
$$(x+30)(x-3) = 0$$
$$x = 3,\ -30$$

x は正の数より　$x = 3$

答　3m

★ 練習問題 $\boxed{8}$ をせよ。